Roll No. ....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 8

(2034)

UG (CBCS) IInd Year Annual Examination

2887

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Vector Calculus)

(SEC-2)

Paper : MATH310TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Attempt *five* questions in all, selecting *one* question from each of the Units I, II, III and IV in Section–B. Section–A is compulsory.

कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। खण्ड–ब में प्रत्येक इकाई I, II, III तथा IV से **एक** प्रश्न का उत्तर दीजिए। खण्ड–अ अनिवार्य है।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) For any vector $\vec{a}$, show that :

$$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}.$$

किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए दर्शाइए कि :

$$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}.$$

(ii) If $\vec{r} = t^3\,\hat{i} + \left(2t^3 - \dfrac{1}{5t^2}\right)\hat{j}$, show that :

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{k}$$

यदि $\vec{r} = t^3\hat{i} + \left(2t^3 - \dfrac{1}{5t^2}\right)\hat{j}$, दर्शाइए कि :

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{k}.$$

(iii) Find a unit normal to the surface

$$2xz^2 - 3xy - 4x = 7$$

at the point (1, –1, 2).

सतह $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ के बिन्दु (1, –1, 2) पर अभिलम्ब इकाई ज्ञात कीजिए।

(iv) Find curl (curl $\vec{F}$), where $\vec{F} = z\hat{i} + x\hat{j} - y\hat{k}$.

ज्ञात कीजिए curl (curl $\vec{F}$), जहाँ $\vec{F} = z\hat{i} + x\hat{j} - y\hat{k}$ ।

(v) Prove that :

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_p) = \dot{\phi}\, e_\phi$$

and

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_\phi) = -\dot{\phi}\,(\hat{e}_p),$$

where '.' denotes the differentiation w.r.t. time t.

सिद्ध कीजिए :

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_p) = \dot{\phi}\, e_\phi$$

और

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_\phi) = -\dot{\phi}\,(\hat{e}_p),$$

जहाँ '.' समय t के सम्बन्ध में विभेदन को दर्शाता है।

(vi) Let u_1, u_2, u_3 be orthogonal coordinates, prove that :

$$|\nabla u_i| = \frac{1}{h_i}\ (i = 1, 2, 3).$$

माना कि u_1, u_2, u_3 लम्बकोणीय निर्देशांक हैं, सिद्ध कीजिए कि :

$$|\nabla u_i| = \frac{1}{h_i}\ (i = 1, 2, 3).$$

(vii) Show that :

$$\int \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) dt = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{c}.$$

दर्शाइए कि :

$$\int \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) dt = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{c}.$$

(viii) State Stoke's theorem.

स्टॉक का प्रमेय बताइए। 2×8=16

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2. (a) Find a unit Vector Coplanar with $\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ and perpendicular to $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$.

$\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ और $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ के लम्बवत् के साथ एक इकाई सदिश समतलीय ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that :

$$(\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=0$$

सिद्ध कीजिए :

$$(\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=0$$ 6½,7

3. (a) If $\vec{r}=(a\cos t)\hat{i}+(a\sin t)\hat{j}+(at\tan\alpha)\hat{k}$, find the value of

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2},\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right].$$

यदि $\vec{r}=(a\cos t)\hat{i}+(a\sin t)\hat{j}+(at\tan\alpha)\hat{k}$, तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2},\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right].$$

(b) Find the angle between the tangents to the curve $\vec{r}=t^2\hat{i}+2t\hat{j}-t^3\hat{k}$ at point $t=\pm 1$.

बिन्दु $t=\pm 1$ पर वक्र $\vec{r}=t^2\hat{i}+2t\hat{j}-t^3\hat{k}$ की स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 6½,7

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) Prove that $\text{curl}\,(u\vec{V})=\nabla u\times\vec{V}+u\,\text{curl}\,\vec{V}$.

सिद्ध कीजिए $\text{curl}\,(u\vec{V})=\nabla u\times\vec{V}+u\,\text{curl}\,\vec{V}$ ।

(b) Find the directional derivative of

$$f=xy+yz+zx$$

in the direction of vector

$$\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$$

at the point (1, 2, 0).

बिन्दु (1, 2, 0) पर सदिश $\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ की दिशा में $f=xy+yz+zx$ का दिशात्मक अवकलज ज्ञात कीजिए। 6½,7

5. (a) Find the angle between the surfaces

$$x^2+y^2+z^2=9$$

and $z=x^2+y^2-3$ at the point (2, –1, 2).

बिन्दु (2, –1, 2) पर सतहों $x^2+y^2+z^2=9$ और $z=x^2+y^2-3$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that :

$$\nabla^2 f(r)=\frac{2}{r}f'(r)+f''(r).$$

सिद्ध कीजिए :

$$\nabla^2 f(r)=\frac{2}{r}f'(r)+f''(r).$$ 6½,7

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) Prove that the unit vectors $\hat{e}_r = \hat{r}, \hat{e}_\theta = \hat{\theta}, \hat{e}_\phi = \hat{\phi}$ in spherical polar coordinate system are mutually perpendicular to each other.

सिद्ध कीजिए कि गोलाकार ध्रुवीय निर्देशांक प्रणाली में इकाई सदिश $\hat{e}_r = \hat{r}, \hat{e}_\theta = \hat{\theta}, \hat{e}_\phi = \hat{\phi}$ एक-दूसरे के परस्पर लम्बवत् होते हैं।

(b) If u_1, u_2, u_3 are orthogonal curvilinear coordinates, then :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}.$$

and ∇u_1, ∇u_2, ∇u_3 are reciprocal system of vectors.

यदि u_1, u_2, u_3 आयतीय वक्रीय निर्देशांक हैं, तो

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}.$$

और ∇u_1, ∇u_2, ∇u_3 सदिश की पारस्परिक प्रणाली है। 6½,7

7. (a) Let

$$u_1 = xy,\ u_2 = \frac{x^2 + y^2}{2},\ u_3 = z.$$

Show that u_1, u_2, u_3 are not orthogonal.

माना कि :

$$u_1 = xy,\ u_2 = \frac{x^2 + y^2}{2},\ u_3 = z.$$

दर्शाइए कि u_1, u_2, u_3 आयतीय नहीं हैं।

(b) If $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, find ∇r and $\nabla\theta$.

यदि $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, ∇r और $\nabla\theta$ ज्ञात कीजिए। 6½,7

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) If

$$\vec{r} = 2t\,\hat{i} + 3t^2\,\hat{j} - t^3\,\hat{k},$$

then evaluate :

$$\int_1^2 \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt.$$

यदि

$$\vec{r} = 2t\,\hat{i} + 3t^2\,\hat{j} - t^3\,\hat{k},$$

तो मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_1^2 \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt.$$

(b) Evaluate :

$$\int_c \vec{f}\cdot d\vec{r},$$

where

$$\vec{f} = xy\,\hat{i} + 2yz\,\hat{j} - 9zx\,\hat{k}$$

and curve C is

$$\vec{r} = t\,\hat{i} + t^2\,\hat{j} + t^3\,\hat{k},$$

where t varies from –1 to 2.

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_c \vec{f}.\vec{dr},$$

जहाँ

$$\vec{f} = xy\hat{i} + 2yz\hat{j} - 9zx\hat{k}$$

और वक्र C, $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$, है,
जहाँ t, -1 से 2 तक भिन्न होता है। 6½,7

9. (a) Evaluate :

$$\iint_S (ax^2 + by^2 + cz^2)\, dS$$

over the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

मूल्यांकन कीजिए :

$$\iint_S (ax^2 + by^2 + cz^2)\, dS$$

गोले के ऊपर $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(b) Evaluate by Green's theorem in plane for

$$\oint_C [(\cos x \sin y - xy)\, dx + \sin x \cos y\, dy]$$

where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$.

$$\oint_C [(\cos x \sin y - xy)\, dx + \sin x \cos y\, dy]$$ के

लिए समतल में ग्रीन प्रमेय द्वारा मूल्यांकन कीजिए, जहाँ C वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ हैं। 6½,7