

B.Sc. IInd April 2024

Roll No.

Total No. of Questions : 9]
(2034)

[Total No. of Printed Pages : 8

UG (CBCS) IInd Year Annual Examination

2882

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Real Analysis)

(Core)

Paper : MATH201TH

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 70

Note :- Section-A is compulsory and contains eight questions of 2 marks each. Section-B have four units. Attempt one question from each Unit.

Section-A (खण्ड-अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (a) Solve :

$$|x + 1| + |x - 2| < 6.$$

हल कीजिए :

$$|x + 1| + |x - 2| < 6.$$

(b) If

$$a > b > 0,$$

then prove that $\sqrt{ab}$ lies between a and b .

CH-182

(1)

Turn Over

यदि

$$a > b > 0,$$

तो सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{ab}$, a व b के मध्य स्थित है।

(c) State Cauchy's second theorem on limits.

सीमाओं पर कॉशी का दूसरा प्रमेय बताइए।

(d) Define Cauchy sequence.

कॉशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(e) Prove that :

$$\sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

is divergent.

सिद्ध कीजिए :

$$\sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

अपसारी है।

(f) Show that the series :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots$$

diverges to $+\infty$.

दर्शाइए कि श्रेणी $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots, +\infty$ से बदल जाती है।

(g) State M_n -Test for uniform convergence.

एकसमान अभिसरण के लिए M_n -परीक्षण का वर्णन कीजिए।

(h) Find the radius of convergence of the power series :

$$\sum \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n.$$

घात श्रेणी

$$\sum \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n$$

की अभिसरण की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

2×8=16

Section-B (खण्ड-ब)

Unit-I (इकाई-I)

2. (a) Solve the inequality for x :

$$\frac{2}{x-2} < \frac{x+2}{x-2} < 1.$$

x के लिए असमानता का हल कीजिए :

$$\frac{2}{x-2} < \frac{x+2}{x-2} < 1.$$

(b) Find the l.u.b. and g.l.b. of the set :

$$S = \left\{ \frac{2-x}{1-x}; x > 0, x \neq 1 \right\}.$$

समुच्चय का l.u.b. तथा g.l.b. ज्ञात कीजिए :

$$S = \left\{ \frac{2-x}{1-x}; x > 0, x \neq 1 \right\}.$$

7,6½

3. (a) Show that for $a > 0$ and $b \in \mathbb{R}$, there exists a natural number n such that $na > b$.

दर्शाए कि $a > 0$ और $b \in \mathbb{R}$ के लिए, एक प्राकृतिक संख्या n मौजूद है, जैसे कि $na > b$.

- (b) Prove that :

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{3}$$

iff

$$\frac{1}{11} < \frac{1-x}{1+x} < \frac{5}{7}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{3}$$

यदि और केवल यदि

$$\frac{1}{11} < \frac{1-x}{1+x} < \frac{5}{7}$$

7,6½

Unit-II (इकाई-II)

4. (a) Prove that a convergent sequence is bounded.

Is its converse true ?

सिद्ध कीजिए कि अभिसारी अनुक्रम परिवद्ध है। क्या इसका विपरीत सत्य है ?

- (b) Show that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n} = 1.$$

दर्शाए कि :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n} = 1.$$

7,6½

5. (a) Prove that if $a_n \rightarrow l$ then :

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \rightarrow l.$$

सिद्ध कीजिए यदि $a_n \rightarrow l$ है, तो

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \rightarrow l.$$

- (b) Prove that the sequence $\{a_n\}$ where

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

is convergent.

अनुक्रम $\{a_n\}$ सिद्ध कीजिए जहाँ

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

अभिसारी है।

7,6½

Unit-III (इकाई-III)

6. (a) Discuss the convergence of the following series for $x > 0$:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$x > 0$ के लिए निम्नलिखित श्रृंखला के अभिसरण की चर्चा कीजिए :

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

- (b) Discuss the convergence of the series :

$$\sum \frac{1.2.3. \dots n}{3.5.7 \dots (2n+1)} x^n; x > 0.$$

श्रृंखला के अभिसरण की चर्चा कीजिए :

$$\sum \frac{1.2.3. \dots n}{3.5.7 \dots (2n+1)} x^n; x > 0. \quad 7, 6\frac{1}{2}$$

7. (a) Discuss the convergence or divergence of the series :

$$\sum \left(\sqrt[3]{n^3 + 1} - n \right).$$

श्रृंखला के अभिसरण या विचलन की चर्चा कीजिए :

$$\sum \left(\sqrt[3]{n^3 + 1} - n \right).$$

- (b) Discuss the convergence of the series :

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

श्रृंखला के अभिसरण की चर्चा कीजिए :

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

7, 6½.

Unit-IV (इकाई-IV)

8. (a) Show that sequence $\{f_n\}$ where

$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

does not converge uniformly on $[0, 1]$.

$\{f_n\}$ का वह क्रम दर्शाइए जहाँ $f_n(x) = nx(1-x)^n$ समान रूप से $[0, 1]$ पर अभिसरित नहीं होता है।

- (b) Find the radius of convergence of

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n}}{n}.$$

निम्नलिखित अभिसरण की त्रिज्या ज्ञात कीजिए :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n}}{n}.$$

7, 6½.

9. (a) Show that :

$$\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

दर्शाइए :

$$\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

(b) Show that the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

is uniformly convergent on $[0, \infty)$.

दर्शाइए कि श्रृंखला

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

$[0, \infty)$ पर समान रूप से अभिसरण है।

7,6½