Roll No. .....

Total No. of Questions : 9] [Total No. of Printed Pages : 15

(2034)

UG (CBCS) IInd Year Annual Examination

2886

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Integral Calculus)

(SEC-1)

Paper : MATH309TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Attempt *five* questions in all, selecting *one* question from each of the Units I, II, III and IV. Section–A (Q. No. 1) is compulsory.

प्रत्येक इकाई I, II, III और IV में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल मिलाकर पाँच प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड-अ (प्रश्न संख्या 1) अनिवार्य है।

Section–A

(खण्ड-अ)

Compulsory Question

(अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Evaluate :

$$\int_{-2}^{3} |x|\, dx.$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_{-2}^{3} |x|\, dx.$$

(ii) Evaluate :

$$\int \frac{dx}{x\,(x^3+1)}.$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \frac{dx}{x\,(x^3+1)}.$$

(iii) Write down the value of

$$\int_0^{\pi/2} \sin^7\theta\, d\theta.$$

$\int_0^{\pi/2} \sin^7\theta\, d\theta$ का मान लिखिए।

(iv) By using reduction formula to integrate

$$\int \tan^4 x\, dx.$$

$\int \tan^4 x\, dx$ को एकीकृत करने के लिए समानयन सूत्र लिखिए।

(v) Find the length of the arc of the curve $y = x^{3/2}$ from (0, 0) to (4, 8).

(0, 0) से (4, 8) तक वक्र $y = x^{3/2}$ के चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 6½,7

(vi) Find the area bounded by the curve $y = \log x$, the x-axis and the ordinates $x = a$, $x = b$.

वक्र $y = \log x$, x-अक्ष और निर्देशांक $x = a$, $x = b$ से घिरा क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

(vii) Evaluate :

$$\iint_A \left(x^3 + y^3\right) dx\, dy$$

where A is the rectangle bounded by the lines $x = 0$, $x = 1$ and $y = 0$, $y = 2$.

मूल्यांकन कीजिए :

$$\iint_A \left(x^3 + y^3\right) dx\, dy$$

जहाँ A, $x = 0$, $x = 1$ और $y = 0$, $y = 2$ रेखाओं से घिरा आयत है।

(viii) Evaluate :

$$\iiint_V x\, dV$$

where

$$V = \{(x, y, z) : 2 \le x \le 4,\ 1 \le y \le x,\ 0 \le z \le x\}.$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\iiint_V x\, dV$$

जहाँ

$$V = \{(x, y, z) : 2 \le x \le 4,\ 1 \le y \le x,\ 0 \le z \le x\}.$$

2×8=16

Section–B

(खण्ड-ब)

Unit–I

(इकाई-I)

2. (a) Evaluate :

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

(b) Evaluate :

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 - 6x + 4}}\, dx.$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 - 6x + 4}}\, dx.$$

7,6½

3. (a) Show that :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cot x} = \frac{\pi}{4}.$$

दर्शाइए कि :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cot x} = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Show that :

$$\int_0^2 x\sqrt{2 - x}\, dx = \frac{16\sqrt{2}}{15}.$$

दर्शाइए कि :

$$\int_0^2 x\sqrt{2 - x}\, dx = \frac{16\sqrt{2}}{15}.$$

Unit–II

(इकाई–II)

4. (a) Establish the reduction formula :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{(m-1)}{(m+n)} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

where m and n are positive integers and $m \neq -n$. Hence evaluate :

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

समानयन सूत्र स्थापित कीजिए :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{(m-1)}{(m+n)} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

जहाँ m और n धनात्मक पूर्णांक और $m \neq -n$ हैं, तो मूल्यांकन कीजिए :

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

(b) Evaluate :

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{3/2} \, dx.$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{3/2} \, dx.$$ 7,6½

5. (a) Obtain a reduction formula for

$$\int x^m (\log x)^n \, dx, \; x > 0;$$

m, n are natural numbers and hence evaluate

$$\int_0^1 x^4 (\log x)^3 \, dx.$$

$\int x^m (\log x)^n \, dx, \; x > 0$ के लिए समानयन सूत्र प्राप्त कीजिए, जहाँ m, n एक प्राकृतिक संख्या है तथा $\int_0^1 x^4 (\log x)^3 \, dx$ का मूल्यांकन कीजिए।

(b) Evaluate :

$$\int_0^{2a} x \sqrt{2ax - x^2} \, dx.$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{2a} x \sqrt{2ax - x^2} \, dx. \qquad 7,6\frac{1}{2}$$

Unit–III

(इकाई–III)

6. (a) Find the whole length of the curve :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ वक्र की पूर्ण लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(b) Find the area of the ellipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1. \qquad 7,6\frac{1}{2}$$

7. (a) Find the volume of the solid obtained by revolving one arc of the cycloid

$$x = a(\theta + \sin \theta)$$

and $\quad y = a(1 + \cos \theta)$

about x-axis.

चक्रज $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ के एक चाप को x-अक्ष के परित: परिक्रमण करने पर प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

(b) Find the area of the surface formed by the revolution of $y^2 = 4ax$ about the x-axis by the arc from the vertex to one end of the latus rectum.

शीर्ष से नाभिलम्ब के एक छोर तक चाप द्वारा x-अक्ष के परित: $y^2 = 4ax$ की परिक्रमा से बनी सतह का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 7,6½

Unit–IV

(इकाई-IV)

8. (a) Evaluate :

$$\iiint (x + y + z)^9 \, dx \, dy \, dz$$

over the region defined by

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1.$

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1$ द्वारा परिभाषित क्षेत्र पर $\iiint (x + y + z)^9 \, dx \, dy \, dz$ का मूल्यांकन कीजिए।

(b) Show that :

$$2 \leq \iint (x^2 + y^2) \, dx \, dy \leq 8$$

$$1 \leq x \leq 2$$

$$1 \leq y \leq 2$$

दर्शाइए कि :

$$2 \leq \iint (x^2 + y^2)\, dx\, dy \leq 8$$

$$1 \leq x \leq 2$$

$$1 \leq y \leq 2$$ 7,6½

9. (a) Evaluate :

$$\iiint x\, dx\, dy\, dz$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\iiint x\, dx\, dy\, dz$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

(b) Evaluate :

$$\iint_A x^2\, y^2\, dx\, dy$$

where

$$A = \{(x, y) : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\iint_A x^2\, y^2\, dx\, dy$$

जहाँ

$$A = \{(x, y) : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$ 7,6½