B.Sc Ist year April 2024

Roll No. .....

Total No. of Questions : **9**] [Total No. of Printed Pages : **8**

(2034)

UG (CBCS) Ist Year Annual Examination

2746

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Differential Calculus)

(Core)

Paper : MATH101TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Attempt *five* questions in all. Section–A, Question No. **1** is compulsory and from Section–B, attempt *one* question each from the Units I, II, III and IV. Marks are given against the questions.

कुल पाँच प्रश्न हल कीजिए। खण्ड-अ, प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है और खण्ड-ब में प्रत्येक इकाई I, II, III और IV से **एक-एक** प्रश्न हल कीजिए। प्रश्न के सम्मुख अंक दिये गये हैं।

Section–A (खण्ड-अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Evaluate :

$$\lim_{x \to \frac{\pi^+}{4}} \cos [x]$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \to \frac{\pi^+}{4}} \cos [x].$$

(ii) Examine the derivability of the function $f(x) = |x|$, $x \in R$ at the origin.

मूल बिन्दु पर फलन $f(x) = |x|$, $x \in R$ की व्युत्पत्ति की जाँच कीजिए।

(iii) Find the nth derivative of $\cos^2 x$.

$\cos^2 x$ का nवाँ अवकलज ज्ञात कीजिए।

(iv) Discuss the applicability of Lagrange's Mean Value Theorem for the function

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \text{ in } [-1, 1].$$

निम्न फलन के लिए लाग्रांजे के माध्यमान प्रमेय की प्रयोज्यता पर चर्चा कीजिए :

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \text{ in } [-1, 1].$$

(v) Show that the graph of the function

$$y = \log x, \; x > 0$$

is concave downwards everywhere.

दर्शाइए कि निम्न फलन का ग्राफ हर जगह नीचे की ओर अवतल है :

$$y = \log x, \; x > 0$$

(vi) Define a cusp.

एक पुच्छ को परिभाषित कीजिए।

(vii) If $w = x^y$, then show that :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = x^{y-1} (1 + y \log x).$$

यदि $w = x^y$ है, तो दर्शाइए कि :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = x^{y-1} (1 + y \log x).$$

(viii) Show that the point $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$ is the only critical point of the function :

$f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4.$

दर्शाइए कि बिन्दु $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$ निम्न फलन का एकमात्र महत्वपूर्ण बिन्दु है :

$f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$ 2×8=16

Section–B (खण्ड-ब)

Unit–I (इकाई-I)

2. (a) If $f(x) < g(x) < h(x)$ for all x in some deleted neighbourhood of a and

$$\lim_{x \to a} f(x) = l = \lim_{x \to a} h(x),$$

then prove that $\lim_{x \to a} g(x) = l$.

a और $\lim_{x \to a} f(x) = l = \lim_{x \to a} h(x)$ के कुछ हटाए गये सभी x के लिए यदि $f(x) < g(x) < h(x)$ है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{x \to a} g(x) = l$$

(b) Examine the continuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

at $x = 0$. If $f(x)$ is discontinuous at $x = 0$, then write the type of discontinuity.

फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

की निरंतरता की जाँच $x = 0$ पर कीजिए। यदि $x = 0$ पर $f(x)$ असंतत है, तो असंततता का प्रकार लिखिए। 7,6½

3. (a) Show that the function f defined by

$$f(x) = |x| + |x + 1|, x \in \mathbb{R}$$

is not derivable at $x = 0, -1$.

दर्शाइए कि $f(x) = |x| + |x + 1|, x \in \mathbb{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f, $x = 0, -1$ पर व्युत्पन्न नहीं है।

(b) If

$$y = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),$$

then find the value of y_n at $x = 0$.

यदि

$$y = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

है, तो $x = 0$ पर y_n का मान ज्ञात कीजिए। 7,6½

Unit–II
(इकाई–II)

4. (a) State and prove Cauchy's Mean Value theorem.

कॉशी के माध्य मान प्रमेय को बताइए और सिद्ध कीजिए।

(b) Evaluate :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

7,6½

5. (a) State and prove Taylor's theorem with Cauchy's form of remainder.

कॉशी के शेषफल रूप के साथ टेलर के प्रमेय को बताइए और सिद्ध कीजिए।

(b) Find the value of $f(x)$ at $x = 2.001$, where $f(x) = x^3 - 2x + 5$ by Taylor's expansion.

$x = 2.001$ पर $f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ टेलर के विस्तार द्वारा $f(x) = x^3 - 2x + 5$ है। 7,6½

Unit–III

(इकाई-III)

6. (a) Find the point of inflexion of the curve :

$$(a^2 + x^2)\, y = a^2 x.$$

वक्र $(a^2 + x^2)\, y = a^2 x$ का विभक्ति बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(b) Find the curvature of the point

$$\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$$

on the Folium $x^3 + y^3 = 3axy$.

फोलियम $x^3 + y^3 = 3axy$ पर बिन्दु

$$\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$$

की वक्रता ज्ञात कीजिए। 7,6½

7. (a) Find all the asymptotes of the curve :

$$x^3 - xy^2 - x^2y + y^3 + 2x^2 - 4y^2 + 2xy + x + y + 1 = 0.$$

वक्र $x^3 - xy^2 - x^2y + y^3 + 2x^2 - 4y^2 + 2xy + x + y + 1 = 0.$

की सभी अनन्तस्पर्शी रेखाएँ ज्ञात कीजिए।

(b) Find the position and nature of the double points of the curve $x^3 + y^3 = 3axy$.

वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ के दोहरे बिन्दुओं की स्थिति और प्रकृति ज्ञात कीजिए। 7,6½

Unit–IV

(इकाई-IV)

8. (a) Examine the continuity of the function :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

at the origin.

मूल बिन्दु पर फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

की निरन्तरता की जाँच कीजिए।

(b) If

$$u = ze^{ax+by},$$

where z is a homogeneous function of x and y of degree n, then prove that :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = (ax + by + n)\, u.$$

यदि $u = ze^{ax+by}$, जहाँ z, x और y डिग्री n का एक सजातीय फलन है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = (ax + by + n)\, u. \qquad 7,6\frac{1}{2}$$

9. (a) Find the extreme value (if any) of the function :

$$f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2.$$

फलन $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ का चरम मान (यदि कोई हो) तो ज्ञात कीजिए।

(b) Find the Jacobian $J(w_1, w_2, w_3)$ with respect to x_1, x_2, x_3 of the functions

$$w_1 = \frac{x_2x_3}{x_1},\ w_2 = \frac{x_3x_1}{x_2},\ w_3 = \frac{x_1x_2}{x_3}.$$

फलन

$$w_1 = \frac{x_2x_3}{x_1},\ w_2 = \frac{x_3x_1}{x_2},\ w_3 = \frac{x_1x_2}{x_3}$$

के x_1, x_2, x_3 के सम्बन्ध में जैकोबियन $J(w_1, w_2, w_3)$ ज्ञात कीजिए। $7,6\frac{1}{2}$