Roll No. ....

Total No. of Questions : **9**] [Total No. of Printed Pages : **8**

(2034)

UG (CBCS) IInd Year Annual Examination

2883

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Algebra)

(Core)

Paper : MATH202TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Section–A is compulsory. In Section-B attempt *one* question each from Units–I, II, III and IV.

खण्ड–अ अनिवार्य है। खण्ड–ब की प्रत्येक इकाई I, II, III तथा IV से **एक-एक** प्रश्न का उत्तर दीजिए।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1. (i) Define order of an element.

किसी तत्व के क्रम को परिभाषित कीजिए।

(ii) Prove that every cyclic group is an abelian group.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक चक्रीय समूह एक एबेलियन समूह होता है।

(iii) If G is an abelian group, then prove that $C(G) = G$.

यदि G एक एबेलियन समूह है, तो सिद्ध कीजिए कि $C(G) = G$।

(iv) If e is an identity element of a group G, then $\{e\}$ is a subgroup of G.

यदि e, एक समूह G का एक पहचान तत्व है, तो $\{e\}$, G का एक उपसमूह है।

(v) If H and K are normal subgroups of G, then HK = KH is normal subgroup of G.

यदि H और K, G के सामान्य उपसमूह हैं, तो HK = KH, G का सामान्य उपसमूह है।

(vi) Let f and g be homomorphism from $f : G \to G'$. Show that $H = \{x \in G : f(x) = g(x)\}$ is a subgroup of G.

मान लीजिए कि f और g, $f : G \to G'$ से समरूपता है। सिद्ध कीजिए कि $H = \{x \in G : f(x) = g(x)\}$, G का एक उपसमूह है।

(vii) Define Ring with Unity.

रिंग को यूनिटी के साथ परिभाषित कीजिए।

(viii) An ideal I of a ring R is a subring of R. Is converse is true ?

रिंग R का आयडियल I, R का उपरिंग है। क्या विलोम सत्य है ? 2×8=16

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2. (a) Show that the set of all positive numbers under the composition defined by $a * b = \frac{ab}{3}$ forms an infinite abelian group.

सिद्ध कीजिए कि $a*b = \frac{ab}{3}$ द्वारा परिभाषित संघटन के अंतर्गत सभी धनात्मक संख्याओं का समुच्चय एक अनंत एबेलियन समूह बनाता है।

(b) If G is an abelian group, then $(ab)^n = a^n b^n$, holds for all $a, b \in G$ and for all $n \in I$.

यदि G एक एबेलियन समूह है, तो $(ab)^n = a^n b^n$ सभी के लिए $a, b \in G$ और सभी $n \in I$ के लिए लागू होता है। 7,6½

3. (a) Prove that all matrices of the form $\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$, where x is a non-zero real, is a group w.r.t. matrix multiplication.

सिद्ध कीजिए कि इस रूप के सभी मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$, मैट्रिक्स गुणन अनुसार एक समूह है, जहाँ x एक गैर-शून्य वास्तविक है।

(b) Prove that a subgroup of a cyclic group is cyclic.

सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समूह का एक उपसमूह चक्रीय होता है। 7,6½

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) If H and K are two subgroups of a group G, then HK is a subgroup of G iff HK = KH.

यदि H और K एक समूह G के दो उपसमूह हैं, तो HK, G का एक उपसमूह है यदि HK = KH।

(b) There is one-one correspondence between the set of left cosets of H in G and the set of right cosets of H in G.

G में H के बाएं कोसेट के सेट और G में H के दाएं कोसेट के सेट के बीच एक-एक पत्राचार है। 6,7½

5. (a) State and prove Lagrange's Theorem for finite groups.

परिमित समूहों के लिए लैग्रेंज प्रमेय को लिखिए और सिद्ध कीजिए।

(b) Prove that centre C(G) of a group G is a subgroup of G.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का केंद्र C(G), G का एक उपसमूह है। 7½,6

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) A subgroup H of a group G is a normal subgroup of G iff $ghg^{-1} \in H$ for every $h \in H$, $g \in G$.

समूह G का एक उपसमूह H, G का एक सामान्य उपसमूह है यदिदि $ghg^{-1} \in H$ प्रत्येक $h \in H$, $g \in G$ के लिए।

(b) Prove that a subgroup H of a group G is normal group iff $HaHb = Hab$ $\forall a, b \in G$.

सिद्ध कीजिए कि समूह G का एक उपसमूह H सामान्य समूह है यदिदि $HaHb = Hab$ $\forall a, b \in G$। 6½,7

7. (a) Let G and G′ be two groups. If $f : G \to G'$ is a homomorphism, show that the Kernel of f is a normal subgroup of G.

माना G और G′ दो समूह हैं। यदि $f : G \to G'$ एक समाकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि f का कर्नेल, G का एक सामान्य उपसमूह है।

(b) Prove that if for a group G, $f : G \to G$ is given by $f(x) = x^3$, $x \in G$, is an isomorphism, then G is abelian group.

सिद्ध कीजिए कि यदि किसी समूह G, $f : G \to G$, $f(x) = x^3$, $x \in G$ द्वारा परिभाषित एक तुल्याकारिता है तो G एबेलियन समूह है। 7,6½

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) Prove that the set M of all $n \times n$ matrices over reals is a non-commutative ring with unity, with zero divisors under addition and multiplication of matrices.

सिद्ध कीजिए कि M सभी $n \times n$ मैट्रिसेस का समुच्चय ओवर रियल, जोड़ और गुणा के तहत, एक शून्य भाजक के साथ, गैर-कम्यूटेटिव रिंग विद यूनिटी है।

(b) Prove that every finite Integral Domain is a field.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित इंटीग्रल डोमेन एक फील्ड है। 7,6½

9. (a) The centre of a ring R is subring of R.

एक रिंग R का केंद्र, R का सबरिंग है।

(b) Let I_1 and I_2 be two ideals of a ring R. Prove that $I_1 + I_2$ is the smallest ideal of R containing $I_1 \cup I_2$.

मान लीजिए I_1 और I_2 एक रिंग R के दो आयडियल्स हैं। सिद्ध कीजिए कि $I_1 + I_2$, R की सबसे छोटी आयडियल है जिसमें $I_1 \cup I_2$ है। 6½,7